PHẦN 2: CƠ SỞ GIẢI TÍCH TOÁN HỌC VÀ ỨNG DỤNG

CHƯƠNG V: ÔN TẬP VỀ GIỚI HẠN VÀ VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN SƠ LƯỢC VỀ LÝ THUYẾT CHUỖI

Nội dung cơ bản

- *Hàm số và giới hạn của hàm số.*
- *Hàm số liên tục.*
- *Hàm số sơ cấp và tính liên tục của hàm số sơ cấp.*
- *Đạo hàm và vi phân hàm một biến. Cực trị hàm một biến.*
- Một số hàm số thường gặp trong phân tích kinh tế. Ứng dụng của đạo hàm hàm số một biến trong kinh tế.
- *Sơ lược về lý thuyết chuỗi.*

Thuật ngữ then chốt Việt – Anh

- Hàm số – Function; **- Giới hạn của hàm số – Limit of a Function**;
- Hàm số sơ cấp cơ bản – The Basic Elementary Functions;
- Hàm số sơ cấp – Elementary Functions;
- Hàm số liên tục – Continuous Function;
- Tính liên tục của hàm số – Continuity of a Function;
- Đạo hàm – Derivative; **- Vi phân – Differential**;
- Đạo hàm và vi phân cấp cao – Derivatives and Differentials of Higher Orders;
- Cực trị – Extremum;
- Hàm một biến – Function of One Variable;
- Hàm số nhiều biến – Function of Several Variables.

V.1. *ÔN TẬP VỀ GIỚI HẠN (SV TỰ ÔN LẠI)*

V.2. HÀM SÔ LIÊN TỤC – CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA CHÚNG

V.2.1. *HÀM SỐ VÀ HÀM SỐ LIÊN TỤC (SV TỰ ÔN LẠI)*

Ghi nhớ: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D, $x_0 \in D$.

- $f(x)$ liên tục tại x_0 khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- $f(x)$ liên tục trên D khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại mọi x thuộc D.

- Hình ảnh hình học: Đồ thị của hàm liên tục là một đường liền nét.

V.2.2. CÁC HÀM SỐ SƠ CẤP VÀ TÍNH LIÊN TỤC CỦA CHÚNG

2.2.1. Các hàm số sơ cấp cơ bản

1. Danh sách các hàm số sơ cấp cơ bản

- Hàm hằng $y = C$ (const).
- Hàm lũy thừa $y = x^{\alpha}$.
- Hàm mũ $y = a^{x}$.
- Hàm logarit $y = \log_a x$.
- Hàm lượng giác $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$.
- Hàm lượng giác ngược $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \text{arccot} x$.

2. Vài nét về các hàm lượng giác ngược

a) Hàm y = arcsinx

- Định nghĩa: y = arcsinx ⇔ (siny = x và y $\in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$).
- Tập xác định $D_y = [-1, 1]$; tập giá trị $I_y = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
- Đạo hàm y' = (arcsinx)' = $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0, \forall x \in (-1, 1)$.
- Đồng biến trên toàn tập xác định.

b) Hàm y = arctanx

- Định nghĩa: y = arctanx ⇔ (tany = x và y $\in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).
- Tập xác định $D_y = \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$; tập giá trị $I_y = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.
- Đạo hàm y' = (arctanx)' = $\frac{1}{1+x^2} > 0, \forall x \in \mathbf{R}$.
- Đồng biến trên toàn tập xác định.

c) Hàm y = arccosx

- Định nghĩa: y = arccosx : = $\frac{\pi}{2}$ – arcsinx ⇔ (cosy = x và y $\in [0, \pi]$).
- Tập xác định $D_y = [-1, 1]$; tập giá trị $I_y = [0, \pi]$.
- Đạo hàm y' = (arccosx)' = $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0, \forall x \in (-1, 1)$.
- Hàm nghịch biến trên toàn tập xác định.

d) Hàm y = arccotx

- Định nghĩa: y = arccotx = $\frac{\pi}{2}$ – arctanx ⇔ (coty = x và y $\in (0, \pi)$).
- Tập xác định $D_y = \mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$; tập giá trị $I_y = (0, \pi)$.
- Đạo hàm y' = (arccotx)' = $-\frac{1}{1+x^2} < 0, \forall x \in \mathbf{R}$.
- Hàm số nghịch biến trên toàn tập xác định.

2.2.2. Các hàm số sơ cấp và tính liên tục của chúng

1. Hàm số sơ cấp: là hàm số nhận được từ các hàm sơ cấp cơ bản bởi các phép toán cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa, khai căn và phép lấy hàm hợp.

2. Ví dụ

+ Ví dụ 1: $y = \tan(x^2 + 3x - 5) + \arcsin(x^3 - 2x).e^{x2 + 4x - 3} - \sqrt[2013]{x^5 + \sin x}$ là một hàm số sơ cấp.

+ Phản ví dụ 2: $y = \begin{cases} \dfrac{(x^2-3x+4)(e^{x-2}-1)}{x-2} & khi \quad x<2 \\ e^x\sin(x-2)+2 & khi \quad x\geq 2 \end{cases}$ là một hàm số không sơ cấp.

3. Nhận xét: Nói nôm na, hàm số không sơ cấp khi nó không thể cho bởi một biểu thức sơ cấp mà phải từ ít nhất hai biểu thức sơ cấp trở lên.

4. Tính liên tục của hàm số sơ cấp

Mọi hàm số sơ cấp đều liên tục trên toàn tập xác định.

V.3. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN HÀM MỘT BIẾN. CỰC TRỊ HÀM MỘT BIẾN

V.3.1. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN CẤP 1, CẤP CAO

1. *Đạo hàm và bảng đạo hàm sơ cấp* *(SV tự ôn lại)*

Ghi nhớ

+ Đối với mỗi hàm số y = f(x) xác định trên tập D và x_0 là điểm tụ của D (tức là có dãy số $\{x_n\}$ trong D sao cho $x_n \neq x_0$, $\forall n \in \mathbf{N}$ và $x_n \to x_0$ khi $n \to \infty$). Khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại x_0 được xác định bởi f'(x_0): = $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x \to 0}$.

+ Nếu một trong hai giới hạn này tồn tại hữu hạn thì cả hai cùng tồn tại hữu hạn và bằng nhau. Khi đó ta nói hàm số y = f(x) khả vi tại điểm x_0.

+ Nếu trái lại, một trong hai giới hạn này không tồn tại hoặc vô hạn thì cả hai cùng như thế và ta nói hàm số y = f(x) không khả vi tại x_0.

2. *Các quy tắc tính đạo hàm* *(SV tự ôn lại)*

a) **Bảng các đạo hàm sơ cấp**

C' = 0; $\quad (x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}; \quad (a^x)' = a^x\ln a; \quad (e^x)' = e^x.$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}; \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}; \quad (\sin x)' = \cos x; \quad (\cos x)' = -\sin x;$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}; \quad (cot\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}; \quad (\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad (\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}.$

b) **Các quy tắc tính đạo hàm**

(u + v)' = u' + v'; (u – v)' = u' – v'; (u.v)' = u'v + uv';

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}; \qquad \dfrac{d}{dx}(u(v(x)) = \dfrac{du}{dv}.\dfrac{dv}{dx}.$

c) **Bảng đạo hàm hàm hợp**

$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1} u'$ $\quad (a^{u})' = a^{u} \ln a \cdot u'$ $\quad (e^{u})' = e^{u} \cdot u'$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ $\quad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $\quad (\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$ $\quad (\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ $\quad (\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

$(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ $\quad (\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

3. *Vi phân* ***(SV tự ôn lại)***

Ghi nhớ: Nếu y = y(x) thì dy = y'(x)dx (bởi thế mà ta còn hay viết đạo hàm y'(x) là $\dfrac{dy}{dx}$.

4. *Đạo hàm và vi phân cấp cao* ***(SV tự ôn lại)***

Ghi nhớ: $y''(x) := (y')'$, $y''' := (y'')'$, … , $y^{(n)} := (y^{(n-1)})'$, n = 2, 3, 4, … .

$d^2y := y''dx^2$, $d^3y := y'''dx^3$, … , $d^ny := y(n)dx^n$, n = 2, 3, 4, … .

V.3.2. CỰC TRỊ VÀ CÁCH TÌM

1. *Khái niệm cực trị (địa phương)* ***(SV tự ôn lại)***

2. Nhắc lại cách tìm cực trị

Bài toán: Cho hàm số y = f(x) xác định trên tập D. Tìm cực trị của y (nếu có).

Thuật toán tìm cực trị: Ta thực hiện tuần tự các bước dưới đây.

- **Bước 1**: Tính đạo hàm y' = f'(x).
- **Bước 2**: Giải phương trình y' = 0 tìm các nghiệm (nếu có)
  + Nếu y' vô nghiệm thì kết luận hàm số không có cực trị. Thuật toán dừng.
  + Nếu y' có nghiệm,chẳng hạn x_1, x_2, … thì đó là những điểm dừng, tức là những điểm khả nghi có cực trị. Làm tiếp bước 3.
- **Bước 3**: Kiểm tra điều kiện có cực trị tại từng điểm dừng.
  Chẳng hạn, xét điểm dừng x = a nào đó.
  + Hoặc là xét dấu ý khi x chạy qua a từ trái sang phải.
    - Khi y' đổi dấu từ âm sang dương thì x = a là điểm cực tiểu.
    - Khi ý đổi dấu từ dương sang âm thì x = a là điểm cực đại.
    - Khi y' không đổi dấu thì x = a không là điểm cực trị.
  + Hoặc là tính y''(a).
    - Khi y''(a) > 0 thì x = a là điểm cực tiểu.
    - Khi y''(a) < 0 thì x = a là điểm cực đại.
    - Khi y''(a) = 0 thì x = a không la điểm cực trị.
- **Bước 4**: Tóm tắt và kết luận về cực trị của hàm số đã cho.

? **SV tự tìm ví dụ và tự giải**

V.3.3. ĐẠO HÀM CỦA ẨN HÀM CHO BỞI PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ

1. Hàm ẩn xác định bởi phương trình tham số

Giả sử x = x(t), y = y(t) là hai hàm phụ thuộc biến $t\in D$, t gọi là tham số và thường là biến thời gian trong thực tế. Hơn nữa giả sử có các đạo hàm x'(t) và y'(t) đồng thời $x'(t) \neq 0$, với mọi $t\in D$. Khi đó, ta có thể khử tham số t để được hàm y = y(x) phụ thuộc trực tiếp vào biến x chứ không gián tiếp thông qua tham số t nữa. Ta bảo y = y(x) là ẩn hàm xác định bởi phương trình tham số x = x(t), y = y(t), $t\in D$.

2. Ví dụ 3: Xét x = cost, y = sint; $t\in(0, \pi)$. Khi đó x'(t) = – sint < 0 , $\forall\, t\in(0, \pi)$. Khi đó ta khử t và được $x^2 + y^2 = 1$, y > 0, tức là $y = \sqrt{1-x^2}$, – 1 < x < 1.

3. Nhận xét: Không phải trường hợp nào cũng dễ dàng khử tham số t như ví dụ trên. Đôi khi việc khử khá phức tạp hoặc không thể giải một cách tường minh để tìm biểu thức của y theo x. Tuy nhiên, ta vẫn có thể tính được đạo hàm y'(x) của ẩn hàm y = y(x) mà không cần biết biểu thức cụ thể của hàm này.

4. Đạo hàm của ẩn hàm

a) Bài toán: Biết ẩn hàm y = y(x) xác định bởi phương trình tham số x = x(t), y = y(t), $t\in D$ (tức là $x'(t) \neq 0$, $\forall t\in D$. Hãy tính đạo hàm cấp 1, 2 của y theo x.

b) Công thức tính đạo hàm ẩn hàm

+ Đạo hàm cấp 1: $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$, $\forall t\in D$ (3.3.1)

Lưu ý: Thực chất công thức (3.3.1) chỉ cho biểu thức của (ẩn) hàm y' = y'(x) theo tham số t.

+ Đạo hàm cấp 2: Lại xét y' = y'(x) = z(x) như một ẩn z = z(x) hàm cho bởi phương trình tham số x = x(t), z = z(t) = $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ và áp dụng (3.3.1) ta được

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{[x'(t)]^3}, \ \forall t\in D \qquad (3.3.2)$$

Lưu ý: Tất nhiên công thức (3.3.2) cũng chỉ cho biểu thức của (ẩn) hàm y'' = y''(x) theo tham số t.

c) Nhận xét: Trong thực hành ta có thể tính trực tiếp

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{x'(t)}, \ \forall t\in D$$

chứ không nhất thiết phải dùng công thức (3.3.2)

d) Ví dụ 4: Biết $x = e^{2t+1}$; $y = e^{3t-2}$, $t\in\mathbf{R}$. Tính đạo hàm của ẩn hàm y = y(x) theo x.

<u>Giải</u> $x'(t) = 2e^{2t+1}$; $y'(t) = 3e^{3t-2}$, $t\in\mathbf{R}$. Do đó

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3e^{3t-2}}{2e^{2t+1}} = \frac{3}{2}e^{t-3},\ y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{x'(t)} = \frac{\frac{3}{2}e^{t-3}}{2e^{2t+1}} = \frac{3}{4e^{t+4}},\ t\in\mathbf{R}.$$

e) Ví dụ 5: Tìm cực trị (nếu có) của hàm ẩn y = y(x) cho bởi phương trình tham số dưới đây

$$x = 2 - t, \quad y = t^3 - 3t + 2; \quad t\in\mathbf{R}.$$

__**Giải**__ + $x'(t) = 0 - 1$, $y'(t) = 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1)$;

$$+\ y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = 3(1 - t^2),\ \ y''(x) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)}{x'(t)} = 6t;\ \ t\in\mathbf{R}.$$

+ $y'(x) = 0 \Leftrightarrow (1 - t^2 = 0,\ x = 2 - t) \Leftrightarrow (t = -1,\ x = 3$ hoặc $t = 1,\ x = 1)$.

+ Với x = 1, t = 1 ta thấy $y''(1) = 6.1 = 6 > 0$ nên y = y(x) đạt cực tiểu với $y_{min} = 0$.

+ Với x = 3, t = – 1 ta thấy $y''(-1) = 6.(-1) = -6$ nên y = y(x) đạt cực đại với $y_{max} = 4$.

V.4.ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM HÀM SỐ MỘT BIẾN TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

V.4.1. MỘT SỐ BIẾN VÀ HÀM SỐ THƯỜNG GẶP TRONG PHÂN TÍCH KINH TẾ

1. Giá (Price): p; Lao động (Labor): L, Vốn (Capital): K

2. Hàm cung (Quantity Supplied): Q_s

3. Hàm cầu (Quantity Demanded): Q_d

4. Hàm lợi ích (Utility): U

5. Hàm (tổng) chi phí (Total Cost): TC

6. Hàm (tổng) doanh thu (Total Revenue): TR

7. Hàm lợi nhuận π = TR – TC (Profit)

7. Biến hay hàm thu nhập quôc dân (National Income): Y

8. Hàm tiêu dùng (Consumption): C

9. Hàm tiết kiệm (Saving): S = Y – C

10. Hàm đầu tư (Investment): I

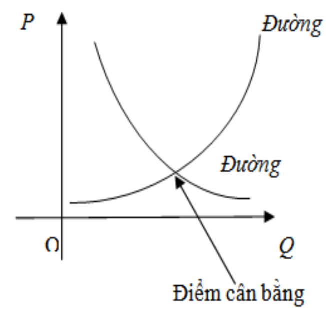
Ngoài ra còn xét các **hàm sản xuất ngắn hạn** Q = Q(L) (các yếu tố khác không đổi).

V.4.2. *PHÂN TÍCH MỘT SỐ HÀM QUAN TRỌNG*

1. *Hàm cung, hàm cầu*

- *Khi phân tích thị trường hàng hóa, người ta thường sử dụng* ***hàm cung*** *(supply function) và* ***hàm cầu*** *(demand function) để biểu diễn sự phụ thuộc của lượng cung* $\mathbf{Q_s}$ *và lượng cầu* $\mathbf{Q_d}$ *đối với một loại hàng hóa vào giá của hàng hóa đó.*
- *Hàm cung và hàm cầu có dạng:* $\quad Q_s = S(P),\quad Q_d = D(P) \qquad$ ***(1.1)***

*Ở đây, **P** là giá hàng hóa; **Q_s** là lượng cung – tức là lượng hàng hóa mà người bán bằng lòng bán với mức giá **P**; **Q_d** là lượng cầu – tức là lượng hàng hóa mà người mua bằng lòng mua với mức giá **P**. Trong mô hình phân tích thị trường một loại hàng hóa, lượng cung (của thị trường) là tổng lượng cung của tất cả các nhà sản xuất (cung cấp) hàng hóa đó, còn lượng cầu là tổng lượng cầu của tất cả những người tiêu dùng hàng hóa đó.Tất nhiên, lượng cung và lượng cầu một loại hàng hóa không chỉ phụ thuộc vào giá hàng hóa đó mà còn phụ thuộc rất nhiều yếu tố khác (sức sản xuất của nhà sản xuất, thu nhập của người tiêu dùng, giá các hàng hóa liên quan với hàng hóa đang xét, ...). Bởi vậy, khi phân tích thị trường dạng (1.1), ta giả thiết rằng các yếu tố khác không thay đổi.*



- *Quy luật thị trường trong kinh tế học nói rằng, đối với mỗi hàng hóa thông thường, hàm cung tăng (đồng biến), còn hàm cầu giảm (nghịch biến). Điều này có nghĩa là, với giả thiết các yếu tố khác không thay đổi, khi giá **P** tăng lên thì lượng cung **Q_s** = **S(P)** tăng – người bán sẽ muốn bán được nhiều hàng hóa hơn, còn lượng cầu **Q_d** = **D(P)** giảm - người mua thì sẽ mua ít đi.*
- *Trên mặt phẳng tọa độ, đồ thị của hàm cung, hàm cầu tương ứng được gọi là đường cung, đường cầu. Giao điểm ($\overline{P}$, $\overline{Q}$) của đường cung và đường cầu gọi là điểm cân bằng thị trường: ở mức giá cân bằng $\overline{P}$, ta có **Q_s** = **Q_d** = $\overline{Q}$ (lượng cân bằng) - người bán bán hết, người tiêu dùng mua đủ, thị trường không có hiện tượng dư thừa hoặc khan hiếm hàng hóa.*
- *Chú ý rằng, dạng (1.1) của hàm cung, hàm cầu thường được dùng trong phân tích kinh doanh, dịch vụ. Còn trong sản xuất, các nhà kinh tế thường biểu thị lượng cung, cầu **Q** bởi trục hoành, còn trục tung để biểu diễn giá **P**. Cách biểu diễn như thế thực chất là dùng các hàm ngược*

$$P = S^{-1}(Q_s),\ P = D^{-1}(Q_d) \qquad (1.2)$$

*của các hàm **Q_s** = **S(P)**, **Q_d** = **D(P)**. Bởi thế, ta cũng gọi các hàm ngược đó tương ứng là các hàm cung, hàm cầu (xem đồ thị minh họa ở trên).*

2. *Hàm sản xuất ngắn hạn*

- *Trong kinh tế học, người ta sử dụng khái niệm **hàm sản xuất** để mô tả sự phụ thuộc của sản lượng hàng hóa (tức là tổng số lượng sản phẩm hiện vật của hàng hóa của một nhà sản xuất) vào các yếu tố đầu vào của sản xuất (gọi tắt là các yếu tố sản xuất), chẳng hạn như vốn, lượng lao động … .*
- *Trong kinh tế học, khái niệm ngắn hạn, dài hạn không có nghĩa là một khoảng thời gian ngắn, dài cụ thể mà được quy ước hiểu như sau : ngắn hạn là khoảng thời gian mà ít nhất một trong (mà thường là đa số) các yếu tố sản xuất không/chưa*

thay đổi. Dài hạn là khoảng thời gian mà tất cả các yếu tố sản xuất có thể/đã thay đổi.

- *Khi phân tích sản xuất, người ta thường quan tâm đến hai yếu tố sản xuất quan trọng là vốn **K** (capital) và lượng lao động **L** (Labor). Trong ngắn hạn, **K** không thay đổi, do đó hàm sản xuất ngắn hạn có dạng: **Q = Q(L)**, ở đó **L** là lượng lao động được sử dụng trong sản xuất và **Q** là mức sản lượng tương ứng. Khi xét hàm sản xuất, sản lượng **Q** được đo theo định kỳ (hàng ngày, hàng tuần, hàng tháng, hàng quý, hàng năm, ...).*

3. *Hàm doanh thu, hàm chi phí, hàm lợi nhuận*

- *Tổng doanh thu (total revenue), tổng chi phí (total cost), tổng lợi nhuận (total profit) của nhà sản xuất phụ thuộc vào sản lượng hàng hóa. Khi phân tích sản xuất, cùng với hàm sản xuất, các nhà kinh tế học còn sử dụng các hàm số dưới đây.*
- ***Hàm doanh thu** là hàm số biểu thị sự phụ thuộc của tổng doanh thu **TR** vào sản lượng **Q**: **TR = TR(Q)**. Chẳng hạn, hàm tổng doanh thu của nhà sản xuất cạnh tranh có dạng bậc nhất : **TR = PQ**.*
- ***Hàm chi phí** là hàm số biểu thị sự phụ thuộc của tổng chi phí sản xuất **TC** vào sản lượng **Q**: **TC = TC(Q)**.*
- ***Hàm lợi nhuận** là hiệu **π** của hàm doanh thu và hàm chi phí: **π = TR(Q) – TC(Q)**.*

4. *Hàm tiêu dùng và hàm tiết kiệm*

- *Lượng tiền mà người tiêu dùng dành để mua sắm hàng hóa hay chi phí dịch vụ hiển nhiên phụ thuộc vào thu nhập. Trong kinh tế, người ta sử dụng **hàm tiêu dùng** để biểu thị sự phụ thuộc của biến tiêu dùng C (Consumption) vào biến thu nhập Y (Income): **C = C(Y)**. Theo quy luật chung, khi thu nhập tăng, người ta có xu hướng tiêu dùng nhiều hơn, do đó có thể xem hàm tiêu dùng là hàm đồng biến.*
- *Hàm tiết kiệm S (Saving) là hàm số biểu thị sự phụ thuộc của lượng tiền tiết kiệm vào thu nhập: **S = S(Y)**.*

V.4.2. ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM HÀM MỘT BIẾN TRONG KINH TẾ

1. Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

Giả sử hai biến x và y có mối quan hệ hàm số $y = f(x)$ (chẳng hạn, x là giá của một loại hàng hóa, còn y là số lượng hàng đó được bán ra). Trong thực tế người ta quan tâm đến xu hướng biến thiên của y tại x_0 khi x thay đổi một lượng nhỏ là Δx. Khi đó lượng thay đổi của y là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Ta có tốc độ thay đổi của y theo x tại x_0 chính là đạo hàm của y = f(x) tại điểm x_0:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Đây cũng là ý nghĩa của đạo hàm trong kinh tế.

Ví dụ 6. Hàm cầu của một loại hàng hóa là $P = 50 - Q^2$ (P là giá của hàng hóa, Q là lượng cầu của loại hàng hóa đó). Tìm tốc độ thay đổi giá khi lượng cầu thay đổi. Giá sẽ thay đổi thế nào khi Q = 1?

Giải. Tốc độ thay đổi của giá *P* theo lượng cầu *Q* chính là đạo hàm của hàm số đã cho, ta có *P' = 2Q*. Khi *Q = 1* thì *P = – 2*. Điều này có nghĩa: khi lượng cầu tăng thêm 1 đơn vị sản phẩm thì giá sẽ giảm là 2 (đồng tiền) trên mỗi đơn vị sản phẩm.

Ví dụ 7. Hàm cầu của một loại sản phẩm là $P = 45 - 2\sqrt{Q}$ (*P* là giá của hàng hóa, *Q* là lượng cầu của loại hàng hóa đó). Tìm tốc độ thay đổi giá khi lượng cầu thay đổi. Giá sẽ thay đổi thế nào khi *Q = 4*?

2. GIÁ TRỊ CẬN BIÊN

- Giả sử x là một biến kinh tế đầu vào (độc lập) và y là biến kinh tế đầu ra phụ thuộc vào x theo mô hình hàm số y = y(x).
- Trong kinh tế học, người ta thường quan tâm đến *sự biến thiên của y như thế nào tại một điểm $x = x_0$ khi x tăng lên 1 đơn vị*.
- Theo định nghĩa đạo hàm ta có:

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x}$$

$$\Leftrightarrow \Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) = y'(x_0).\Delta x + o(\Delta x) \approx y'(x_0).\Delta x .$$

Khi $\Delta x = 1$ ta được $\Delta y \approx y'(x_0)$. Như vậy, *đạo hàm* $y'(x_0)$ ***của hàm trong mô hình kinh tế y = y(x) tại điểm x_0 biểu diễn xấp xỉ lượng thay đổi của biến đầu ra y tại điểm x_0 khi biến đầu vào x tăng thêm 1 đơn vị từ x_0 lên $x_0 + 1$.*** Trong kinh tế, người ta gọi lượng thay đổi này là ***giá trị cận biên*** hay ***biên tế*** của biến kinh tế y = y(x) tại điểm x_0, ký hiệu **My(x_0)**.

- Khi xét từng hàm kinh tế cụ thể, biên tế có tên gọi tương tứng.
  - Đối với mô hình hàm sản xuất **Q = Q(L)**, giá trị cận biên **Q'(L_0) = MQ(L_0)** được gọi là ***sản phẩm hiện vật cận biên của lao động (Marginal Physical Product of Labor) tại L_0*** – Tức là ***xấp xỉ của lượng sản phẩm hiện vật gia tăng tại mức lao động L_0 khi tăng thêm một đơn vị lao động***, ký hiệu **$MPP_L(L_0)$**.
  - Đối với hàm doanh thu **TR = TR(Q), TR'(Q_0) = MTR(Q_0)** gọi là ***doanh thu cận biên (Marginal Revenue) tại điểm Q_0*** – Đó chính là ***xấp xỉ lượng doanh thu gia tăng tại mức sản lượng Q_0 khi tăng thêm một đơn vị sản phẩm***, ký hiệu là **MR(Q_0)**.
  - Đối với mô hình hàm chi phí **TC = TC(Q)**, biên tế **TC'(Q_0) = MTC(Q_0)** gọi là ***chi phí cận biên (Marginal Cost) tại điểm Q_0*** – Đó chính là ***xấp xỉ của lượng chi phí gia tăng tại mức sản lượng Q_0 khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm***, ký hiệu **MC(Q_0)**.
  - Tương tự, cận biên **MC(Y_0), MS(Y_0)** của các hàm tiêu dùng **C = C(Y)**, tiết kiệm **S = S(Y)** theo biến thu nhập Y tại điểm Y_0 được gọi tương ứng

là ***xu hướng tiêu dùng cận biên* (*Marginal Propensity to Consume*)**và ***xu hướng tiết kiệm cận biên* (*Marginal Propensity to Save*) *tại mức thu nhập Y_0*** và được ký hiệu lần lượt là **MPC(Y_0)**, **MPS(Y_0)** – Đó cũng tương ứng là ***xấp xỉ lượng tiêu dùng, tiết kiệm thay đổi tại mức thu nhập Y_0 khi thu nhập tăng thêm một đơn vị***.

a) Ví dụ 8. Giả sử chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm là

$$\overline{C} = 0{,}0001Q^2 - 0{,}02Q + 5 + \frac{500}{Q}.$$

Tìm giá trị cận biên của chi phí đối với *Q*. Áp dụng khi *Q = 50*.
Giải. Hàm tổng chi phí để sản xuất ra *Q* đơn vị sản phẩm là

$$C = \overline{C}Q = 0{,}0001Q^3 - 0{,}02Q^2 + 5Q + 500.$$

Do đó giá trị cận biên của chi phí là MC(Q) = C'(Q) = $0{,}0003Q^2 - 0{,}04Q + 5$.
Khi *Q = 50* thì MC(50) = C'(50) = $0{,}0003.50^2 - 0{,}04.50 + 5 = 3{,}75$.
Như vậy, nếu *Q* tăng lên 1 đơn vị, từ 50 lên 51 sản phẩm, thì chi phí tăng lên khoảng 3,75 đơn vị (tiền).
b) Ví dụ 9. Số vé bán được *Q* và giá vé *P* của một hãng xe buýt được cho bởi Q = 10.000 – 125P. Tìm doanh thu cận biên khi *P = 30* và khi *P = 42*.

<u>**Giải**</u> Ta có $P = \dfrac{10000 - Q}{125}$ nên doanh thu là $R = PQ = \dfrac{Q(10000 - Q)}{125}$.

Do đó $$\mathrm{MR}(Q) = \mathrm{R}'(Q) = \frac{10000 - 2Q}{125}.$$

- Nếu *P = 30* thì *Q = 10000 – 125.30 = 6250*, suy ra *MR(6250) = – 20*.
- Nếu *P = 42* thì *Q = 10000 – 125.42 = 4750*, suy ra *MR(4750) = 4*.

c) Ví dụ 10. Cho hàm tiêu dùng

$$C = \frac{5\left(2\sqrt{Y^3} + 3\right)}{Y + 10}.$$

Hãy xác định xu hướng tiêu dùng cận biên và xu hướng tiết kiệm cận biên khi thu nhập Y = 100.

<u>**Giải**</u> Xu hướng tiêu dùng cận biên MPC(Y) = C'(Y), suy ra MPC(100) = C'(100).
Từ đó suy ra xu hướng tiết kiệm cận biên MPS(100) = S'(100) = (Y – S)'(100) = 1 – C'(100).

d) Ví dụ 11. Giả sử hàm sản xuất của một doang nghiệp là

Q = Q(**L**) = $5\sqrt{L}$, **L** là số công nhân.

Ở mức **L** = 100 công nhân (đơn vị lao động) thì **Q** = $5\sqrt{100}$ = 50 đơn vị sản phẩm.
Sản phẩm hiện vật cận biên của lao động tại L = 100 là:

$$MPP_L(100) = Q'(100) = \frac{5}{2\sqrt{100}} = 0{,}25.$$

Điều này có nghĩa là: khi tăng mức sử dụng lao đông từ 100 lên 101 công nhân thì sản lượng sẽ tăng thêm xấp xỉ 0,25 đơn vị sản phẩm.

3. ĐẠO HÀM CẤP HAI VÀ QUY LUẬT LỢI ÍCH CẬN BIÊN GIẢM DẦN

(THE LAW OF DIMINISHING RETURNS)

a) Trong kinh tế, các hàm y = f(x) biểu diễn lợi ích (thu nhập, doanh thu, lợi nhuận, …) đều tuân theo quy luật lợi ích cận biên giảm dần. Dưới giác độ toán học, đạo hàm cấp hai của các hàm số đó không dương: f’’(x) ≤ 0, với mọi x.

b) **Ví dụ 12**: Xét hàm sản xuất Q = Q(L) = 5 $\sqrt{L}$, 0 < L là lượng lao động (số nhân công). Khi đó sản phẩm hiện vật cận biên MPP(L) = Q’(L) = $\dfrac{5}{2\sqrt{L}}$ và lượng này giảm dần vì Q’’(L) = $-\dfrac{5}{4\sqrt{L^3}}$.

4. HỆ SỐ CO GIÃN

a) Độ thay đổi tuyệt đối và tương đối

Khi đại lượng *x* tăng (giảm) một lượng Δx thì ta gọi Δx là ***độ tăng (giảm) tuyệt đối*** của *x*. Tỉ số $\dfrac{\Delta x}{x}$.100% gọi là ***độ tăng (giảm) tương đối*** của *x*.

Ví dụ dưới đây cho ta thấy ý nghĩa của độ thay đổi tương đối và nếu chỉ dừng ở độ thay đổi tuyệt đối thì không đủ để phản ánh các hiện tượng kinh tế xã hội.

b) Ví dụ 9

+ Một căn hộ có giá 200 triệu đồng, nếu tăng thêm 1 triệu đồng, tức là giá 201 triệu đồng, thì độ tăng tuyệt đối là 1 triệu đồng, còn độ tăng tương đối là $\dfrac{1}{200}$.100% = 0,5% và có thể coi rằng giá cả biến động không đáng kể.

+ Một điện thoại Samsung có giá 4 triệu đồng, nếu tăng lên 1 triệu đồng thì độ tăng tuyệt đối cũng là 1 triệu đồng nhưng độ tăng tương đối lại khá lớn: $\dfrac{1}{4}$.100% = 25% và rõ rằng đây là một biến động lớn về giá.

b) Hệ số co giãn

Hệ số co giãn của y theo x, ký hiệu ε_{yx}, là độ biến đổi tương đối của y (tính ra %) khi x tăng tương đối lên 1% (từ x lên x + 1%.x).

Như vậy,

$$\varepsilon_{yx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}.\frac{x}{y}\right) = y'(x).\frac{x}{y}$$

Khi Δx khá bé, ta thường xấp xỉ ε_{yx} với tỉ số giữa độ thay đổi tương đối của *y* và của *x*, tức là xem $\varepsilon_{yx} \approx \dfrac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}.\dfrac{x}{y}$.

c) Dùng hệ số co giãn phân loại điểm trạng thái trong kinh tế

Xét hàm cầu Q = Q(p) theo biến p là giá bán hàng hóa. Trong thực tế, ta biết rằng, nói chung hễ giá tăng thì cầu sẽ giảm và ngược lại, khi giá giảm thì nói chung lượng cầu sẽ tăng lên. Nghĩa là, Q nghịch biến. Bởi vậy biên tế Q'(p) < 0 với mọi biến p > 0. Xét hệ số co giãn $\varepsilon_D := \varepsilon_{Qp}(p) = Q'(p).\dfrac{p}{Q}$ tại điểm (p_0, Q_0)

- Nếu $\left|\varepsilon_{Qp}(p_0)\right| > 1$ thì điểm (p_0, Q_0) gọi là **điểm co giãn** hay **co giãn mạnh**.
- Nếu $\left|\varepsilon_{Qp}(p_0)\right| = 1$ thì điểm (p_0, Q_0) gọi là **điểm co giãn đơn vị** hay **điểm đẳng co**.
- Nếu $\left|\varepsilon_{Qp}(p_0)\right| < 1$ thì điểm (p_0, Q_0) gọi là **điểm không co giãn** hay **co giãn yếu**.

Ví dụ 10. Cho hàm cầu $Q = 30 - 4P - P^2$. Tìm hệ số co giãn tại điểm P = 3.

<u>**Giải**</u> Ta có $\varepsilon_{QP} = (-4 - 2P).\dfrac{P}{30 - 4P - P^2} = -\dfrac{2P(P+2)}{30 - 4P - P^2}$.

Tại P = 3 ta có $\varepsilon_{QP} = -\dfrac{10}{3} \approx -3{,}3$. Điều này có nghĩa: ở mức giá P = 3 (đồng) mà bây giờ nếu P tăng lên 1% thì lượng cầu sẽ giảm 3,3%.

Ví dụ 11. Cho hàm cầu $Q = 45 - 6P - 3P^2$. Tìm hệ số co dãn tại điểm P = 2.

4. LỰA CHỌN TỐI ƯU TRONG KINH TẾ

Nhiều bài toán kinh tế được đưa về bài toán tìm cực trị của hàm số y =f(x) nào đó.

Gọi P là đơn giá,
Q = Q(P) là hàm sản lượng,
R = P.Q là hàm doanh thu,
C = C(Q) là hàm chi phí,
$\pi = R - C$ là hàm lợi nhuận.

Trong kinh tế ta thường giải các bài toán sau:

- Tìm P để sản lượng Q đạt tối đa (cực đại).
- Tìm P hoặc tìm Q để doanh thu R đạt tối đa.
- Tìm Q để chi phí C đạt tối thiểu (cực tiểu).

Ví dụ 13. Cho hàm cầu Q = 300 – P, hàm chi phí $C = Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10$.
Tìm Q để lợi nhuận lớn nhất.

Giải. Ta có Q = 300 – P, suy ra P = 300 – Q.
Do đó doanh thu R = PQ = (300-Q)Q, lợi nhuận là

$$\pi = R - C = (300 - Q)Q - (Q^3 - 19Q^2 + 333Q + 10) =$$
$$= -Q^3 + 18Q^2 - 33Q - 10$$
$$\pi'(Q) = -3Q^2 + 36Q - 33\,;\ \pi'(Q) = 0 \Leftrightarrow Q = 1 \ \ hoac\ Q = 11$$

Mặt khác $\pi''(Q) = -6Q + 36\,;\ \pi''(1) = 30 > 0\,;\ \pi''(11) = -30 < 0$.

Vậy, π đạt cực đại khi Q = 11 , $\pi_{\max} = \pi(11) = 474$.

Ví dụ 14. Cho hàm cầu Q = 100 – P, hàm chi phí $C = Q^3 - 25Q^2 + 184Q + 15$.
Tìm Q để lợi nhuận lớn nhất.

V.5. SƠ LƯỢC VỀ LÝ THUYẾT CHUỖI SỐ

V.5.1. CÁC KHÁI NIỆM

1. Định nghĩa: Một biểu thức dạng (tổng vô hạn) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ...$ của dãy số u_1, u_2, u_3, … được gọi là một ***chuỗi số***. Các số u_1, u_2, u_3, … được gọi là các ***số hạng***, u_n gọi là ***số hạng tổng quát*** của chuỗi đã cho.

2. Sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số

Cho chuỗi số $$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... \qquad \textbf{(1)}$$

Xét dãy số sau đây:

$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$, … , $S_n = u_1 + u_2 + … + u_n$ $(0 < n \in \mathbf{N})$.

Ta gọi dãy số S_1, S_2, S_3, … là ***dãy tổng riêng*** của chuỗi (1).

+ Nếu tồn tại hữu hạn $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ thì ta bảo chuỗi (1) ***hội tụ*** và S gọi là ***tổng*** của chuỗi (1).

+ Trái lại, khi giới hạn $\lim_{n\to\infty} S_n$ không tồn tại hoặc vô hạn thì ta nói chuỗi (1) ***phân kỳ*** và không có tổng.

3. Ví dụ 1. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} + ...$ có số hạng tổng quát là $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ và dãy tổng riêng $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ với

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + ... + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}$$
$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Do đó $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$ (hữu hạn). Vậy, chuỗi này hội tụ và có tổng là 1.

4. Ví dụ 2. Chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\frac{n+1}{n} = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + ... + \ln\frac{n+1}{n} + ...$ có số hạng tổng quát là $u_n = \ln\frac{n}{n+1}$ $(n \in \mathbf{N}^*)$ và dãy tổng riêng là $\{S_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ với

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + ... + \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n+1}{n}$$
$$= (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + ... + \left(\ln n - \ln(n-1)\right) + \left(\ln(n+1) - \ln n\right)$$
$$= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).$$

Do đó $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Vậy chuỗi này phân kỳ.

5. Ví dụ 3. Xét chuỗi số cấp số nhân với công bội q, tức là chuỗi số dạng

$$\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = q + q^2 + q^3 + ... + q^n + ...$$

Ta có các khẳng định sau đây:

- Nếu $|q|<1$ thì chuỗi số hội tụ và có tổng $S=\dfrac{q}{1-q}$.
- Nếu $|q|\geq 1$ thì chuỗi số phân kì.

Chẳng hạn: $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{4}$.

? Hãy tự kiểm chứng khẳng định trên.

? Làm thế nào để nhận biết một chuỗi đã cho là hội tụ hay phân kỳ và tính tổng của chuỗi khi chuỗi hội tụ?

V.5.2. VÀI TÍNH CHẤT CỦA CHUỖI SỐ

1. Chuỗi số không thay đổi tính hội tụ hay phân kì nếu ta thêm vào hay bớt đi một số hữu hạn các số hạng của chuỗi số.

2. Nếu hai chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$ hội tụ thì các chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}ca_n$ cũng hội tụ và ta có $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}ca_n=c\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

V.5.2. CÁC TIÊU CHUẨN HỘI TỤ

5.2.1. Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

1. Nếu chuỗi hội thụ thì số hạng tổng quát của nó phải dần đến không khi n→+∞, tức là

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_n \text{ hội tụ}\right)\Rightarrow\left(\lim_{n\to+\infty}u_n=0\right).$$

2. Nhận xét

+ Điều kiện cần này **không phải là điều kiện đủ**, tức là điều ngược lại nói chúng sai. Có thể $\lim_{n\to+\infty}u_n=0$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ vẫn phân kỳ.

+ Ta thường dùng điều kiện cần ở dạng phủ định để nhận biết chuỗi phần kỳ. Cụ thể, chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}u_n$ mà vi phạm điều kiện cần, tức là $\lim_{n\to+\infty}u_n\neq 0$ hoặc không tồn tại giới hạn $\lim_{n\to+\infty}u_n$ thì chuỗi phân kỳ.

3. Ví dụ 4

+ Mặc dù $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$ nhưng chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$ vẫn phân kỳ.

+ Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}$ phân kỳ vì vi phạm điều kiện cần: $\lim_{n\to+\infty}\dfrac{2n+1}{n+3}=2\neq 0$.

5.2.2. CHUỖI SỐ DƯƠNG VÀ CÁC TIÊU CHUẨN HỘI TỤ

1. Khái niệm

Chuỗi số dương là chuỗi số có tất cả các số hạng không âm: $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, $u_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

2. Các ví dụ 1, 2, 4 ở các mục trên đều là các chuỗi số dương.

3. Các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương

a) Tiêu chuẩn so sánh: Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sao cho $u_n \geq v_n \geq 0$. Khi đó

+ Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ cũng hội tụ; + Nếu $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cũng phân kỳ.

Ví dụ 5. Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + 4}$. Nhìn số hạng tổng quát của chuỗi, ta nghĩ ngay đến việc so sánh nó với chuỗi cấp số nhân hội tụ $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Rõ ràng $\frac{1}{3^n + 4} < \frac{1}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Từ sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ suy ra chuỗi số đã cho hội tụ.

b) Tiêu chuẩn so sánh dạng giới hạn: Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ sao cho $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$. Nếu $0 < k < +\infty$ thì hai chuỗi số đó có cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

c) Chú ý

+ Khi $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ và $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$ $(0 < k < +\infty)$ thì ta nói u_n tương đương với kv_n, ký hiệu $u_n \sim kv_n$ $(n \to +\infty)$. Như vậy tiêu chuẩn so sánh dạng giới hạn có thể viết lại như sau

$$(u_n \sim kv_n,\ 0 < k < +\infty) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n,\ \sum_{n=1}^{+\infty} v_n \text{ cùng tính hội tụ hoặc phân kỳ}\right)$$

+ Khi sử dụng các tiêu chuẩn so sánh, ta thường quan sát tinh tế số hạng tổng quát của chuỗi số chưa biết tính hội thụ hay phân kỳ mà "khéo chọn" để so sánh với một chuỗi số mà ta đã biết rõ tính hội tụ hay phân kỳ của nó.

+ Ta thừa nhận tính hội tụ hay phân kỳ của các chuỗi số dưới đây.

+ Chuỗi điều hòa tổng quát: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ **hội tụ khi $\alpha > 1$, phân kỳ khi $\alpha \leq 1$.**

+ Chuỗi điều hòa đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ **luôn hội tụ với mọi $\alpha > 0$.**

+ Chuỗi cấp số nhân $\sum_{n=1}^{+\infty} q^n$ hội tụ khi $|q|$ < 1, phân kỳ $|q| \geq 1$.

Ví dụ 5. Các chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ hội tụ. Các chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ phân kì.

d) Tiêu chuẩn Cauchy. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sao cho C = $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n}$. Khi đó

+ Nếu C < 1 thì chuỗi số hội tụ.
+ Nếu C > 1 thì chuỗi số phân kỳ.
+ Khi C = 1 thì không thể kết luận được gì về tính hội thụ hay phân kỳ của chuỗi.

e) Tiêu chuẩn D' Alembert. Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ sao cho D = $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Khi đó

+ Nếu D < 1 thì chuỗi số hội tụ.
+ Nếu D > 1 thì chuỗi số phân kỳ.
+ Nếu D = 1 thì không thể kết luận được gì về tính hội thụ hay phân kỳ của chuỗi.

f) Nhận xét: Giả sử cần xét sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

+ Khi u_n là tỉ số mà tử và mẫu đều là các tổng hiệu của các lũy thừa của n thì nên dùng tiêu chuẩn so sánh.
+ Khi u_n có chứa dấu "!" thì nên áp dụng tiêu chuẩn D'Alambert.
+ Khi u_n là một biểu thức chưa lũy thừa mà bậc liên quan đến n thì nên dùng tiêu chuẩn Cauchy.

Ví dụ 6. Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương dưới đây

a) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n^2+n+2}$; b) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{3^n}$.

Giải a) Xét chuỗi dương $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n-1}{n^2+n+2}$. Số hạng tổng quát $u_n = \frac{n-1}{n^2+n+2} \sim \frac{1}{n}$ (α = 1). Do đó chuỗi phân kỳ theo tiêu chuẩn so sánh.

b) Xét chuỗi dương $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$. Số hạng tổng quát $u_n = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$ chứa lũy thừa bậc n nên ta nghĩ đến tiêu chuẩn Cauchy. Rõ ràng $C = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{3n+2} = \frac{2}{3} < 1$. Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Cauchy.

c) Xét chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{3^n}$. Số hạng tổng quát $u_n = \frac{n!}{3^n}$, ∀n∈N*. Do đó $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$. Ta thấy $D = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{3} = +\infty > 1$. Vậy chuỗi phân kỳ theo tiêu chuẩn D'Alambert.

Ví dụ 7 (SV tự giải !) Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương dưới đây

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{n^2+1}$; b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+3n-1}{n^2+2n+4} \right)^n$; c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2^n}$.

5.2.3. CHUỖI SỐ ĐAN DẤU VÀ TIÊU CHUẨN LEIBNIZ

1. Khái niệm

Chuỗi số đan dấu là chuỗi số có dạng $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ hoặc $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ với $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbf{N}^*$.

Ví dụ 8. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \ldots$ là chuỗi số đan dấu.

2. Tiêu chuẩn Leibniz

Chuỗi số đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ hoặc $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ hội tụ khi và chỉ khi dãy $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ đơn điệu giảm tiến dần về 0, tức là $a_n \geq a_{n+1} \geq 0, \forall n \in N^*$ và $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Ví dụ 9. Xét sự hội tụ của các chuỗi số đan dấu dưới đây

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha > 0)$; b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n+2}$

<u>Giải</u> a) Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ với $0 < a_n = \frac{1}{n^\alpha}$ hiển nhiên đơn điệu giảm tiến về 0. Vậy chuỗi hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

b) Xét chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{3n+2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ với $0 < a_n = \frac{2n-1}{3n+2} \to \frac{2}{3} \neq 0$. Vậy chuỗi phân kỳ.

5.2.4. CHUỖI SỐ BẤT KÌ VÀ HỘI TỤ TUYỆT ĐỐI HAY BÁN HỘI TỤ

1. Định lý. Cho chuỗi số bất kì $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$. Khi đó, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|$ hội tụ thì chuỗi số đã cho $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ cũng hội tụ và được gọi là ***hội tụ tuyệt đối***.

2. Chú ý: Ngược lại nói chung không đúng. Nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối thì ta nói nó là ***bán hội tụ***.

Ví dụ 10. Chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2+1}$ hội tụ tuyệt đối. Còn chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ bán hội tụ.

? Hãy tự kiểm chứng điều này.

BÀI TẬP CHƯƠNG V

V.1. Tính đạo hàm của các hàm số sau đây

a) $y = \cos^2 x$; b) $y = \ln\left(x + \sqrt{a + x^2}\right)$

c) $y = (x^2 + x - 3)e^x$; d) $y = \ln(\cos x + 2\sin x)$

e) $y = \arctan(e^x)$ f) $y = xe^{3x} + x^3$

V.2. Tính đạo hàm và vi phân cấp một, cấp hai của các hàm số sau đây

a) $y = \sqrt{1 + x^2}$ b) $y = \ln(1 - x^2)$ c) $y = e^{2x}(\cos x + \sin x)$

d) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ e) $y = \sin^2 x$ f) $y = \ln(\cos 2x - x)$

V.3. Tính đạo hàm cấp n của hàm số

a) $y = \frac{1}{x}$ b) $y = \ln(ax + b)$ c) $y = \sin(ax + b)$

V.4. Hàm tiêu dùng của một quốc gia cho bởi

$$C = \frac{10\sqrt{Y} + 0,7\sqrt{Y^3} - 0,2Y}{\sqrt{Y}}.$$

Tìm xu hướng tiết kiệm cận biên khi thu nhập là 25.

V.5. Tìm giá trị cận biên của các hàm số sau

a) $C = 0,1Q^2 + 3Q + 2$ tại Q = 3.

b) $C = 0,04Q^3 - 0,5Q^2 + 4,4Q + 7500$ tại Q = 5.

c) $R = 250Q + 45Q^2 - Q^3$ tại Q = 5.

V.6. Cho hàm cầu $Q = \frac{60}{P} + \ln(65 - P^3)$.

a) Xác định hệ số co dãn khi P = 4.

b) Nếu giá giảm 2% (từ 4 giảm còn 3,92) thì lượng bán ra thay đổi bao nhiêu phần trăm?

V.7. Doanh thu của một loại sản phẩm cho bởi công thức $R = 240Q + 57Q^2 - Q^3$.

Tìm Q để doanh thu đạt tối đa.

V.8. Cho hàm cầu của một loại sản phẩm là P = -5Q + 30. Tìm mức giá để doanh thu đạt tối đa.

V.9. Một loại sản phẩm có hàm cầu là P = 42 – 4Q và hàm chi phí trung bình là $\overline{C} = 2 + \frac{80}{Q}$. Tìm mức giá để có lợi nhuận tối đa.

V.10. Trung bình chi phí 1 đơn vị sản phẩm được cho bởi công thức

$$\overline{C} = 2Q^2 - 36Q + 210 - \frac{200}{Q}.$$

a) Tìm mức sản xuất $Q \in [2;10]$ để có chi phí tối thiểu.

b) Tìm mức sản xuất $Q \in [5;10]$ để có chi phí tối thiểu.

V.11. Hàm cầu của một loại sản phẩm độc quyền là P = 600 – 2Q và tổng chi phí là

$$C = 0,2Q^2 + 28Q + 200.$$

a)Tìm mức sản xuất Q để lợi nhuận đạt tối đa. Tìm mức giá P và lợi nhuận lúc đó.

b) Chính quyền đặt thuế là 22 đơn vị tiền cho một đơn vị sản phẩm. Tìm mức sản xuất để lợi nhuận đạt tối đa. Tìm mức giá và lợi nhuận trong trường hợp này.

V.12. Xét sự hội tụ của các chuỗi số dương sau đây

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)^2$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(2n)!}$ f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+3n-2}{5n^2-4n+3}\right)^n$

V.12bis. Xét sự hội tụ của chuỗi số sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{2n+3}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n-1}}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(3n-2)}{2n+3}$

CHƯƠNG VI. HÀM HAI BIẾN – *SƠ LƯỢC VỀ HÀM NHIỀU BIẾN*

VI.1. KHÁI NIỆM

1. HÀM HAI BIẾN

Cho không gian $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbf{R}\}$ (đồng nhất với mặt phẳng tọa độ Oxy) và tập hợp $D \subset \mathbf{R}^2$.
Ánh xạ

$$f: \quad D \to \mathbf{R}$$
$$(x, y) \mapsto z = f(x, y),$$

tức là một quy tắc f đặt tương ứng mỗi cặp số thực (x, y) trong tập D với số thực z = f(x, y), được gọi là ***hàm hai biến*** xác định trên tập hợp D. Ta gọi x, y là hai biến số độc lập, còn z là hàm số phụ thuộc vào x, y; f(x, y) là giá trị của hàm hai biến ứng với cặp số thực $(x, y) \in D$.

Ví dụ 1. Cho $D = \mathbf{R}^2$ và $z = f(x, y) = x^3 - y^3 + xy$. Khi đó, f có tập xác định là toàn mặt phẳng $\mathbf{R}^2$.

+ Ứng với cặp số $(x, y) = (2, -1) \in D$, ta có $z = f(2, -1) = 2^3 - (-1)^3 + 2.(-1) = 7$.
+ Ứng với cặp số $(x, y) = (3, 2) \in D$, ta có $z = f(3, 2) = 3^3 - 2^3 + 3.2 = 25$.

Thông thường khi cho hàm số, người ta phải cho trước tập xác định D và cho ánh xạ f để có thể tính được giá trị tương ứng của hàm số.
Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, người ta chỉ cho ánh xạ f mà không cho tập xác định. Khi đó, ta quy ước **tập xác định D của hàm số là tập hợp các cặp số $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ sao cho của biểu thức f(x, y) có nghĩa, tức là có giá trị thực.**

Ví dụ 2. Cho hàm hai biến $z = \sqrt{y - x^2}$. Khi đó, tập xác định của z là $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / y - x^2 \geq 0\}$. Chẳng hạn $(1, 2) \in D$, còn $(2, 1) \notin D$.

Ví dụ 3. Hàm hai biến $f(x, y) = \ln(2x - y + 1)$ coa tập xác định là $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / 2x - y + 1 > 0\}$. Chẳng hạn $(2, 4) \in D$, $(2, 5) \notin D$.

2. *HÀM BA BIẾN (SV tự đọc)*

Cho không gian $\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z) / x, y, z \in \mathbf{R}\}$ (đồng nhất với không gian tọa độ Oxyz) và tập hợp $D \subset \mathbf{R}^3$.
Ánh xạ

$$f: \quad D \to \mathbf{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto u = f(x, y, z),$$

*tức là một quy tắc f đặt tương ứng mỗi bộ ba số thực (x, y, z) trong tập D với số thực u = f(x, y. z), được gọi là **hàm ba biến** xác định trên tập hợp D.*

Ví dụ 5. *Cho $D = \mathbf{R}^3$, $u = 2x - y^2 + yz$. Khi $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ ta được $u(1, 2, 3) = 2.1 - 2^2 + 2.3 = 4$.*

VII.2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN

1. ĐẠO HÀM RIÊNG

Cho hàm hai biến z = f(x, y) xác định trên tập hợp D. Nếu xem y như hằng số thì z trở thành hàm của một biến x. Đạo hàm của hàm số một biến x đó được gọi là đạo hàm riêng theo x của hàm hai biến z đã cho, kí hiệu là z'_x hoặc $\frac{\partial z}{\partial x}$ hay $\frac{\partial f}{\partial x}$. Như vậy

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Như vậy, thực chất **để tính đạo hàm riêng của hàm hai biến theo biến số này, ta xem biến số kia như hằng số và có quyền áp dụng mọi tính chất, mọi quy tắc của đạo hàm hàm một biến.**

Ví dụ 1. Cho hàm số $z = x^3 - y^2 + xy$. Khi đó các đạo hàm riêng của z như sau:

$$z'_x = 3x^2 + y;\ z'_y = -2y + x;\quad z'_x(1, 0) = 3.1^2 + 0 = 3,\ z'_y(1, 0) = -2.0 + 1 = 1.$$

Ví dụ 2. Các đạo hàm riêng của hàm số $z= x\cos y - y\sin x$ là

$$z'_x = \cos y - y\cos x;\qquad z'_y = -x\sin y - \sin x.$$

Ví dụ 3. Tính đạo hàm riêng của hàm số

a) $z = \dfrac{x}{y}$ b) $z = \ln(x^2 + y^3)$

c) $z = e^{xy}$ d) $z = \sin(xy - y^2)$

2. VI PHÂN

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ xác định trên tập hợp D và có các đạo hàm riêng z'_x, z'_y. Khi đó, biểu thức $dz = z'_x dx + z'_y dy$ được gọi là vi phân (toàn phần) của hàm hai biến z đã cho.

Ví dụ 4. Hàm số $z = x^3 - y^2 + xy$ có vi phân là

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = (3x^2 + y)dx\ (-2y + x)dy;\quad dz(1, 0) = z'_x(1, 0)dx + z'_y(1, 0)\, dy = 3dx + dy.$$

Ví dụ 5. Tính đạo hàm riêng và vi phân của hàm số $z = x^y$.

Giải. Ta có hai đạo hàm riêng: $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$.

Vi phân: $dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy.$

Ví dụ 6. Tính đạo hàm riêng và vi phân của hàm số

a) $z = x^3y^2 - xy^4$ b) $z = \ln(xy + y^2 - x)$

c) $z = \cos(xy + 1)$ d) $z = arctg(xy)$

Chú ý: *Vi phân được sử dụng để tính gần đúng giá trị của hàm nhiều biến. Ta có công thức gần đúng sau đây:*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$

trong đó $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ *là vi phân của hàm số* $f(x, y)$ *tại điểm* (x_0, y_0).

Ví dụ *7. Tính gần đúng* $1{,}05^{0{,}98}$.

Đặt $f(x, y) = x^y$, $(x_0, y_0) = (1,1)$, $\Delta x = 0{,}05$, $\Delta y = -0{,}02$.

Ta cần tính $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Ta có $f(x_0, y_0) = 1^1 = 1$, $f'_x(x_0, y_0) = 1$, $f'_y(x_0, y_0) = 0 \Rightarrow df(x_0, y_0) = 0{,}05$.

Vậy $1{,}05^{0{,}98} \approx 1 + 0{,}05 = 1{,}05.$

Ví dụ 8. *a) Tính gần đúng* $1{,}03^{2{,}04}$.

b) Tính gần đúng giá trị của hàm số $f(x, y) = 6x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{2}}$ tại $(x_0, y_0) = (998\,;101{,}5)$.

3. ĐẠO HÀM RIÊNG CẤP HAI

Cho hàm hai biến $z = f(x, y)$ có các đạo hàm riêng z'_x, z'_y. Ta gọi đây là các đạo hàm riêng cấp một. Rõ ràng chúng đều là hàm hai biến nên lại có đạo hàm riêng của mình.

Đạo hàm riêng của đạo hàm riêng cấp một được gọi là đạo hàm riêng cấp hai của hàm số ban đầu.

Ta có 4 đạo hàm riêng cấp hai sau đây:

$$\left(z'_x\right)'_x = z''_{x^2},\ \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy}\ ;\quad \left(z'_y\right)'_x = z''_{yx},\ \left(z'_y\right)'_y = z''_{y^2}$$

với các tên gọi lần lượt là : đạo hàm riêng cấp hai theo x hai lần; đạo hàm riêng cấp hai theo x rồi theo y; đạo hàm riêng cấp hai theo y rồi theo x; đạo hàm riêng cấp hai theo y hai lần.

Các đạo hàm riêng cấp hai còn được kí hiệu lần lượt là $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Ví dụ 9. Hàm số $z = x^3 - y^2 + xy$ có các đạo hàm riêng cấp một là $z'_x = 3x^2 + y$, $z'_y = -2y + x.$ Ta tính tiếp 4 đạo hàm riêng cấp hai:

$$z''_{x^2} = 6x,\ z''_{xy} = 1;\ z''_{yx} = 1,\ z''_{y^2} = -2.$$

Ta nhận thấy các đạo hàm riêng cấp hai hỗn hợp bằng nhau nên ta có

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

Do đó, ở các ví dụ sau ta chỉ cần tính 3 đạo hàm riêng cấp hai:

$$z''_{x^2},\ z''_{xy},\ z''_{y^2}.$$

Ví dụ 10. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số $z = x^y$.

Giải. Ta có hai đạo hàm riêng cấp một: $z'_x = yx^{y-1},\ z'_y = x^y \ln x$.

Ta tính tiếp các đạo hàm riêng cấp hai:

$$z''_{x^2} = y(y-1)x^{y-2}\ ;\ z''_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x\ ;\ z''_{y^2} = x^y \ln^2 x.$$

Ví dụ 11. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của hàm số

a) $z = e^{xy}$ b) $z = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

c) $z = arctg(xy)$ d) $z = x^3 + y^3 - xy$

4. VI PHÂN CẤP HAI

Vi phân cấp hai của hàm hai biến $z = f(x, y)$ là biểu thức có dạng:

$$d^2z = d(dz) = z''_{x^2}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{y^2}dy^2$$

Ví dụ 12. Hàm số $z = x^3 - y^2 + xy$ có các đạo hàm riêng cấp hai:

$$z''_{x^2} = 6x,\ z''_{xy} = 1;\ z''_{yx} = 1,\ z''_{y^2} = -2.$$

Vậy, vi phân cấp hai của hàm số đó là

$$d^2z = 6xdx^2 + 2dxdy - 2dy^2.$$

Ví dụ 13. Tính vi phân cấp hai của hàm số

a) $z = arctg\dfrac{x}{y}$ b) $z = \ln(x^2 + y^2)$

c) $z = xy^2 + x^3y^3$ d) $z = \sin(x^2 - y^2)$

VI.3. CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN

1. KHÁI NIỆM

Cho hàm số $f(x,y)$ xác định trên tập hợp $D, M_0(x_0,y_0) \in D.$

Ta nói M_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x,y)$ nếu tại các điểm M(x,y) nằm xung quanh M_0, $M \neq M_0$, ta có $f(M) < f(M_0)$ *hay* $f(x,y) < f(x_0,y_0)$.

Tương tự ta có khái niệm điểm cực tiểu khi thay bất đẳng thức $f(M) < f(M_0)$ bởi bất đẳng thức $f(M) > f(M_0)$.

Điểm cực đại, cực tiểu gọi chung là điểm cực trị.

Ví dụ 14. Xét hàm số $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 3$, và điểm $M_0(1,0) \in D = R^2$.

Giả sử M(x,y) là điểm bất kì thuộc tập xác định, nằm xung quanh điểm M_0, $M \neq M_0$.

Ta có $f(M) = f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x + 3;\ f(M_0) = f(1,0) = 2$.

Suy ra $f(M) - f(M_0) = x^2 + y^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 + y^2 > 0,\ do\ M \neq M_0$.

Vậy, $f(M) > f(M_0)$ nên M_0 là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

2. ĐIỀU KIỆN CÓ CỰC TRỊ

a) **Điều kiện cần**: Nếu $f(x,y)$ có cực trị tại $M_0(x_0,y_0) \in D$ thì các đạo hàm riêng tại M_0 phải bằng 0: $f'_x(M_0) = f'_y(M_0) = 0.$

Ví dụ 15. Hàm số cho ở ví dụ 1 có các đạo hàm riêng:

$$z'_x = 2x - 2;\ z'_y = 2y \ \Rightarrow\ z'_x(1,0) = 2.1 - 2 = 0;\ z'_y = 2.0 = 0.$$

Nhận xét: Điều ngược lại không đúng, nghĩa là nếu hàm hai biến có các đạo hàm riêng bằng 0 tại điểm M_0 thì chưa chắc điểm này đã là điểm cực trị của hàm số. Ta đưa ra tên gọi sau.

- Điểm mà tại đó các đạo hàm riêng bằng 0 được gọi là điểm dừng.

b) **Điều kiện đủ.** Giả sử $M_0(x_0,y_0) \in D$ là điểm dừng của hàm số $f(x,y)$ và tại M_0 hàm số có các đạo hàm riêng cấp hai

$$A = f''_{x^2}(M_0),\ B = f''_{xy}(M_0),\ C = f''_{y^2}(M_0).$$

Khi đó:

- Nếu $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0,\ A > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại M_0.

- Nếu $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0,\ A < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại M_0.

- Nếu $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0$ thì hàm số không có cực trị tại M_0.
- Nếu $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$ thì không có kết luận gì.

Ví dụ 16. Tìm cực trị của hàm số $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Giải. Ta có tập xác định của hàm số đã cho là $D = R^2$.

- Ta tính các đạo hàm riêng cấp 1 để tìm điểm dừng: $z'_x = 3x^2 - 3y;\ z'_y = 3y^2 - 3x$.

Suy ra

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ (x^2)^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Từ đây ta có hai nghiệm

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases};\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Do đó ta thu được hai điểm dừng là $M_1(0,0),\ M_2(1,1) \in D.$

- Ta tính các đạo hàm riêng cấp hai tại từng điểm dừng và xét xem chúng có thoả mãn điều kiện đủ hay không.

Ta có $z''_{x^2} = 6x;\ z''_{xy} = -3;\ z''_{y^2} = 6y$.

Tại điểm dừng $M_1(0,0)$ thì $A = z''_{x^2}(M_1) = 6.0 = 0;\ B = z''_{xy}(M_1) = -3;\ C = z''_{y^2}(M_1) = 6.0 = 0.$

Do đó $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$. Vậy điểm M_1 không là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Tại điểm dừng $M_2(1,1)$ thì $A = z''_{x^2}(M_2) = 6.1 = 6;\ B = z''_{xy}(M_2) = -3;\ C = z''_{y^2}(M_2) = 6.1 = 6.$

Do đó $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27 > 0;\ A = 6 > 0.$

Vậy điểm M_2 là điểm cực tiểu của hàm số đã cho.

Khi đó ta có $z_{\min} = z(1,1) = 1^3 + 1^3 - 1.1 = -1.$

3. CÁC BƯỚC TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM HAI BIẾN

a) Bài toán: Cho hàm hai biến z = z(x, y). Tìm cực trị của z (nếu có).

b) Thuật toán tìm: Ta thực hiện các bước dưới đây.

Bước 1: Tìm tập xác định rồi tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số đã cho.

Bước 2: Giải hệ phương trình $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ **để tìm điểm dừng (nếu có).**

+ Nếu hệ vô nghiệm thì dừng lại, kết luận hàm số không có cực trị.
+ Nếu hệ có nghiệm thì mỗi nghiệm cho ta một điểm dừng. Làm tiếp bước 3.

Bước 3: Kiểm tra điều kiện có cực trị tại từng điểm dừng.
Chẳng hạn xét điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$. Tính

$$A = z''_{xx}(M_0),\ B = z''_{xy}(M_0),\ C = z''_{yy}(M_0) \text{ và } \Delta = AC - B^2.$$

+ Nếu $\Delta > 0$ thì M_0 là điểm cực trị. Cụ thể $A > 0$ thì M_0 là điểm cực tiểu; còn khi $A < 0$ thì điểm M_0 là điểm cực đại.
+ Nếu $\Delta < 0$ thì M_0 không là điểm cực trị.
+ Nếu $\Delta = 0$ thì chưa thể kết luận được.
Bước 4: Tóm tắt các kết quả và kết luận về cực trị của hàm số đã cho và tính cực trị đó (nếu có).

Ví dụ 17. Tìm cực trị của hàm số $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Giải. – Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R}^2$.

– Tính các đạo hàm riêng cấp 1, cấp 2 của hàm số đã cho

$$z'_x = 4x^3 - 2x - 2y\,,\ z'_y = 4y^3 - 2x - 2y$$

$$z''_{x^2} = 12x^2 - 2\,,\ z''_{xy} = -2\,,\ z''_{y^2} = 12y^2 - 2$$

– Tìm điểm dừng: Giải hệ $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ ta tìm được ba điểm dừng là

$M_1(1,1)$, $M_2(-1,-1)$, $M_3(0,0)$.

– Tại điểm M_1, M_2 ta đều có A = 10 > 0, B = - 2, C = 10, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 96 > 0$

Vậy M_1, M_2 là hai điểm cực tiểu với $z_{min} = z(M_1) = z(M_2) = -2$.

– Tại điểm M_3 ta có A = - 2, B = - 2, C = - 2, $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = 0$ nên ta chưa có kết luận gì. Ta xét điểm M_3 bằng định nghĩa. Ta có $z(M_3) = 0$.

Tại các điểm nằm xung quanh M_3, chẳng hạn điểm $M(x,y)$ với $x = y = \dfrac{1}{n}$ thì

$Z\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{2}{n^2}\left(\dfrac{1}{n^2} - 2\right) < 0$ nếu n > 1.

Tại điểm $M'(x,y)$ với $x = \dfrac{1}{n}$, $y = -\dfrac{1}{n}$ thì $Z\left(\dfrac{1}{n}, -\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{2}{n^4} > 0$.

Suy ra $z(M_3) > z(M)$, $z(M_3) < z(M')$.

Vậy điểm M_3 không là điểm cực trị của hàm số đã cho.

Ví dụ 18. Tìm cực trị của hàm số

a) $z = 5xy - x^5 - y^5$ b) $z = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$

c) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; d) $z = x^3 + y^3 + 6xy$

VI.4. CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN CỦA HÀM HAI BIẾN

1. KHÁI NIỆM

Trong mục III.3 ta đã xét bài toán tìm cực trị của hàm hai biến z = z(x,y), trong đó các biến số x, y không có điều kiện ràng buộc. Ta gọi đó là cực trị tự do hay cực trị không điều kiện.

Ở mục này ta xét bài toán tìm cực trị của hàm hai biến z khi x, y bị ràng buộc với nhau bởi một điều kiện nào đó.

Ta nói hàm số $z = f(x,y)$ đạt cực đại tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ nếu tồn tại một lân cận D của điểm M_0 sao cho $f(M) < f(M_0)$ với mọi điểm $M \in D, M \neq M_0$, $\varphi(M) = 0$.

Thông thường phương trình $\varphi(x,y) = 0$ cho ta một đường cong C nào đó. Như vậy ta chỉ so sánh $f(M_0)$ với $f(M)$ khi điểm M nằm trên C mà thôi.

Tương tự ta có khái niệm cực tiểu với điều kiện.

2. ĐIỀU KIỆN CÓ CỰC TRỊ

a) Điều kiện cần: Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$, trong đó $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ là các hàm số có đạo hàm riêng liên tục.

Khi đó tồn tại số λ sao cho

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda\varphi'_y(x_0, y_0) = 0 \\ \varphi(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

Số λ được gọi là nhân tử Lagrange. Hàm số $L(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$ được gọi là hàm số Lagrange.

b) Điều kiện đủ: Giả sử điểm $M_0(x_0, y_0)$ thoả mãn (1) ứng với nhân tử λ_0. Ta gọi M_0 là ***điểm dừng*** của bài toán cực trị có điều kiện. Ta chuyển bài toán tìm cực trị của hàm số $z = f(x,y)$ với điều kiện $\varphi(x,y) = 0$ thành bài toán tìm cực trị không điều kiện của hàm số Lagange.

Xét vi phân cấp hai của hàm số L(x,y) tại điểm M_0 và nhân tử λ_0:

$$d^2L(M_0) = L''_{x^2}(M_0)dx^2 + 2L''_{xy}(M_0)dxdy + L''_{y^2}(M_0)dy^2$$

trong đó dx, dy bị ràng buộc bởi điều kiện $d\varphi(M_0) = \varphi'_x(M_0)dx + \varphi'_y(M_0)dy = 0$ **(2)**

Khi đó: + Nếu $d^2L(M_0) > 0$ với mọi dx, dy không đồng thời triệt tiêu thỏa mãn (2) thì M_0 là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số đã cho.

+ Nếu $d^2L(M_0) < 0$ với mọi dx, dy không đồng thời triệt tiêu thỏa mãn (2)thì M_0 là điểm cực đại có điều kiện của hàm số đã cho.

c) Phát biểu tương đương của điều kiện đủ: Giả sử $M_0(x_0, y_0)$ là một điểm dừng của z = z(x, y) với điều kiện φ(x, y) = 0 ứng với nhân tử λ_0. Đặt

$$H: = \begin{vmatrix} L''_{xx} & L''_{xy} & \varphi'_x \\ L''_{xy} & L''_{yy} & \varphi'_y \\ \varphi'_x & \varphi'_y & 0 \end{vmatrix}$$

tính tại điểm M_0 ứng với nhân tử λ_0 (gọi là định thức Hessian).

Khi đó: + Nếu H > 0 thì M_0 là điểm cực đại với điều kiện đã cho.

+ Nếu H < 0 thì điểm M_0 là điểm cực tiểu với điều kiện đã cho.

+ Nếu H = 0 thì chưa thể kết luận được về điểm dừng M_0.

3. CÁC BƯỚC TÌM CỰC TRỊ CÓ ĐIỀU KIỆN

a) Bài toán: Tìm cực trị (nếu có) của z = z(x, y) với điều kiện φ(x, y) = 0.

Ý tưởng chung là dùng hàm (bổ trợ) Lagrange để chuyển bài toán cực trị có điều kiện về cực trị tự do.

b) Thuật toán tìm: Ta thực hiện các bước dưới đây.

Bước 1: **Lập hàm Lagrange L = z(x, y) + λφ(x, y) và tính các đạo hàm riêng cấp 1, 2 của L theo x, y.**

Bước 2: **Giải hệ $L'_x = 0$, $L'_y = 0$, $L'_\lambda = \varphi(x, y) = 0$ (3 phương trình 3 ẩn λ, x, y) tìm nhân tử λ và các điểm dừng tương ứng.**

+ Nếu hệ vô nghiệm thì dừng lại và kết luận hàm số z không có cực trị với điều kiện rằng buộc.

+ Nếu hệ có nghiệm thì mỗi nghiệm (λ, x, y) cho ta một nhân tử và một điểm dừng tương ứng. Làm tiếp bước 3.

Bước 3: **Kiểm tra điều kiện có cực trị với điều kiện tại từng điểm dừng và nhân tử tương ứng.**

Chẳng hạn xét điểm dừng $M_0(x_0, y_0)$ ứng với nhân tử λ_0. Xác định vi phân cấp 2 của L tại M_0 và λ_0 tương ứng hoặc tính định thức Hessian tại M_0 và λ_0 tương ứng.

+ Nếu H > 0 (hoặc $d^2L(M_0 < 0)$ thì điểm M_0 là điểm cực đại có điều kiện.

+ Nếu H < 0 (hoặc $d^2L(M_0 > 0)$ thì điểm M_0 là điểm cực tiểu có điều kiện.

Bước 4: **Tóm tắt các kết quả và kết luận.**

Ví dụ 19. Tìm cực trị của hàm số z = 6 – 4x – 3y với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$.

Giải Ta có hàm số Lagrange $L(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. Do đó

$$L'_x = -4 + 2\lambda x\,,\ L'_y = -3 + 2\lambda y;\ L''_{x^2} = 2\lambda\,,\ L''_{xy} = 0\,,\ L''_{y^2} = 2\lambda$$

Giải hệ $L'_x = 0$, $L'_y = 0$, $L'_\lambda = 0$ ta tìm được hai điểm dừng

$$M_1\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right), \lambda_1 = \frac{5}{2}\ ;\ M_2\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right), \lambda_2 = -\frac{5}{2}$$

- Tại M_1 ta có vi phân cấp hai $d^2L(M_1) = 2\lambda_1 dx^2 + 2\lambda_1 dx^2 = 5(dx^2 + dy^2) > 0$ với mọi dx, dy không đồng thời triệt tiêu.

  Vậy M_1 là điểm cực tiểu có điều kiện của hàm số đã cho với $z_{\min} = z(M_1) = 1$.

- Tại M_2 ta có vi phân cấp hai $d^2L(M_2) = 2\lambda_2 dx^2 + 2\lambda_2 dx^2 = -5(dx^2 + dy^2) < 0$ với mọi dx, dy không đồng thời triệt tiêu.

  Vậy M_2 là điểm cực đại có điều kiện của hàm số đã cho với $z_{\max} = z(M_2) = 11$.

4. Nhận xét: Khi điều kiện φ(x, y) = 0 có thể giải để biểu diễn y = y(x) theo x hoặc x = x(y) theo y mà không phức tạp thì ta có thể thế y = y(x) hoặc x = x(y) vào z để được hàm 1 biến x (hoặc y). Bài toán quy về tìm cực trị của hàm 1 biến z = z(x, y(x)) hoặc z = z(x(y), y).

Ví dụ 20. Tìm cực trị (nếu có) của hàm số $z = x^2 + 2y$ với điều kiện $x^2 - y = 1$.

Giải: Điều kiện $x^2 - y = 1 \Leftrightarrow y = x^2 - 1$. Thay vào z ta được: $z = x^2 + 2(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 1$. Bài toán quy về tim cực trị tự do của hàm 1 biến $z = 3x^2 - 1$.

+ z'(x) = 6x, z''(x) = 6. Hàm số có một điểm dừng duy nhất x = 0, y = – 1. Vì z'' = 6 > 0 (hằng trong khoảng thời gian ngắn hơn) nên z đạt cực tiểu tại M(0, – 1) với $z_{\min} = -1$.

Kết luận: Hàm không có cực đại có điều kiện nào. Hàm số z đạt cực trị có điều kiện tại điểm M(0, – 1) với $z_{\min} = -1$.

VI.5. ỨNG DỤNG BÀI TOÁN CỰC TRỊ VÀO KINH TẾ

Ví dụ 21. Cho hàm lợi nhuận của một xí nghiệp đối với một loại sản phẩm là

$$\pi = R - C - T$$

trong đó π là lợi nhuận, *R* là doanh thu, *C* là tổng chi phí gồm chi phí cố định *f* (không phụ thuộc vào số lượng sản phẩm), chi phí biến thiên *cQ* (*c* là chi phí trung bình cho một sản phẩm, *Q* là sản lượng), *t* là thuế trên một sản phẩm, *T* là tổng thuế.

Giả sử $P = a - bQ$ $(a, b > 0)$.

Khi đó ta có $\pi = aQ - bQ^2 - (c+t)Q - f$.

Bài toán đặt ra là:

- Xí nghiệp muốn xác định mức sản lượng *Q* để lợi nhuận đạt cực đại.
- Nhà nước muốn xác định mức thuế *t* trên một sản phẩm để tổng thuế đạt cực đại.

Ta sẽ giải bài toán cho trường hợp cụ thể: a = 10, b = 1, c = 2, f = 1. Khi đó hàm lợi nhuận là

$$\pi = 10Q - Q^2 - (2+t)Q - 1$$

a) Trước tiên ta đứng trên cương vị của xí nghiệp, xem *t* như tham số thì π là hàm một biến theo *Q*. Khi đó ta có

$$\pi' = -2Q + 8 - t\,,\ \ \pi' = 0 \Leftrightarrow Q = \frac{8-t}{2}\ \ (0 < t < 8)\,,\ \ \pi' = -2 < 0$$

Vậy hàm lợi nhuận đạt cực đại khi $Q = Q^* = \dfrac{8-t}{2}$ $(0 < t < 8)$.

b) Ta xác định mức thuế: Với $Q = Q^*$ thì $T = tQ^* = \dfrac{8t - t^2}{2}$. Do đó

$$T' = \frac{8-2t}{2} = 4 - t\,,\ \ T' = 0 \Leftrightarrow t = 4\,,\ \ T'' = -1 < 0$$

Vậy tổng thuế đạt cực đại khi $t = t^* = 4$ (thoả mãn 0 < t < 8).

Khi đó ta có

$$Q = Q^* = 2\,,\ \ P = P^* = a - bQ^* = 10 - 2 = 8$$

$$\pi = \pi^* = 20 - 4 - 6.2 - 1 = 3$$

Ví dụ 22. Cho hàm lợi nhuận của một công ty đối với một sản phẩm là

$$\pi = R - C = PQ - wL - rK$$

trong đó π là lợi nhuận, *R* là doanh thu, *C* là chi phí, *L* là lượng lao động, *w* là tiền lương cho một lao động, *K* là tiền vốn, *r* là lãi suất của tiền vốn, *P* là đơn giá bán sản phẩm. Giả sử *Q* là hàm sản xuất Cobb – Douglas dạng $Q = L^{1/3}K^{1/3}$. Ta tìm *L, K* để lợi nhuận đạt tối đa cho trường hợp *w = 1, r = 0,02, P = 3*. Khi đó ta có hàm hai biến với các đạo hàm riêng

$$\pi = 3L^{1/3}K^{1/3} - L - 0{,}02K$$

$$\pi'_L = L^{-2/3}K^{1/3} - 1\,,\ \ \pi'_K = L^{1/3}K^{-2/3} - 0{,}02$$

$$\pi''_{L^2} = -\frac{2}{3}L^{-5/3}K^{1/3}\,,\ \ \pi''_{LK} = \frac{1}{3}L^{-2/3}K^{-2/3}\,,\ \ \pi''_{K^2} = -\frac{2}{3}L^{1/3}K^{-5/3}$$

Tìm điểm dừng bằng cách giải hệ $\pi'_L = 0, \pi'_K = 0$ ta được L = 50, K = 2500. Xét các đạo hàm riêng cấp hai tại điểm dừng $(L_0, K_0) = (50, 2500)$ ta có

$$A = -\frac{1}{75} < 0\,,\ B = \frac{1}{7500}\ \ ,\ C = -\frac{1}{187500}\,, \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \frac{1}{18750000} > 0$$

Vậy lợi nhuận đạt tối đa khi L = 50, K = 2500 với $\pi_{\max} = 50$.

Ví dụ 23. Giả sử một xí nghiệp sản xuất ra một loại sản phẩm và bán tại hai thị trường với đơn giá lần lượt là 7 và 6 trên một sản phẩm. Cho biết chi phí sản xuất của xí nghiệp đó là

$C = q_1^2 + q_1q_2 + q_2^2 + q_2 + 3$, trong đó q_1 , q_2 lần lượt là lượng sản phẩm bán được ở hai thị trường. Tìm q_1 , q_2 để lợi nhuận của xí nghiệp là $\pi = R - C$ đạt cực đại.

Ví dụ 24. Một công ty sản xuất một loại sản phẩm và tiêu thụ trên hai thị trường riêng biệt. Cho biết hàm cầu trên hai thị trường lần lượt là $Q_{d1} = 80 - \frac{P_1}{3}$, $Q_{d2} = 80 - \frac{P_2}{4}$. Hàm tổng chi phí là

$$C(Q) = Q^2 + 30Q + 10,$$

trong đó P_1, P_2 là đơn giá trên từng thị trường, *Q* là tổng sản lượng của công ty. Tìm khối lượng sản phẩm Q_1, Q_2 công ty cung cấp cho từng thị trường để lợi nhuận cao nhất.

Ví dụ 25. Cho hàm lợi ích $U = C_1C_2$, trong đó C_1, C_2 là số tiền tiêu dùng tại cuối thời kì thứ nhất, thứ hai. Giả sử lãi suất tại cuối thời kì thứ nhất là *r = 0,5%*, tổng thu nhập tại cuối thời kì này là

$I = C_1 + \frac{C_2}{1+r}$. Ta cần tìm C_1, C_2 để hàm lợi ích *U* đạt cực đại.

Giải. Đây là bài toán tìm cực trị của hàm số *U* với điều kiện ràng buộc $I - C_1 - \frac{C_2}{1+r} = 0$.

Do đó ta xét hàm số Lagrange $L(C_1, C_2) = C_1C_2 + \lambda\left(I - C_1 - \frac{C_2}{1{,}005}\right)$.

Ta có

$$L'_{C_1} = C_2 - \lambda\,,\ L'_{C_2} = C_1 - \frac{\lambda}{1{,}005}\,, L'_\lambda = I - C_1 - \frac{C_2}{1{,}005}$$

$$L''_{C_1^2} = 0\,,\ L''_{C_1C_2} = 1\,,\ L''_{C_2^2} = 0$$

Giải hệ phương trình $L'_{C_1} = 0$, $L'_{C_1} = 0$, $L'_\lambda = 0$ ta tìm được điểm dừng:

$$C_1 = \frac{I}{2};\ C_2 = 1{,}005\frac{I}{2};\ \lambda = 1{,}005\frac{I}{2} \Rightarrow M_0\left(\frac{I}{2}; 1{,}005\frac{I}{2}\right)$$

Vi phân cấp hai tại điểm dừng $d^2L(M_0) = 2dC_1dC_2 = -\frac{2}{1{,}005}dC_2^2 < 0$ (vì dC_1 , dC_2 bị ràng buộc bởi điều kiện $d\left(I - C_1 - \frac{C_2}{1+r}\right) = -dC_1 - \frac{1}{1+r}dC_2 = 0$).

Vậy *U* đạt cực đại khi $C_1 = C_1^* = \frac{I}{2}$; $C_2 = C_2^* = 1{,}005\frac{I}{2}$. Khi đó $U_{\max} = 1{,}005\frac{I^2}{4}$.

Ví dụ 26. Cho hàm chi phí của một xí nghiệp là $C(L, K) = wL + rK$, trong đó w = 400 là tiền lương của mỗi lao động, r = 0,01 là lãi suất của vốn vay. Giả sử xí nghiệp phải sản xuất $Q_0 = 1000$ sản phẩm và hàm sản phẩm là $Q = L^{1/2}K^{1/2}$. Tìm L và K để C đạt cực tiểu.

HD. Cần tìm cực tiểu của hàm chi phí C với điều kiện ràng buộc $Q = Q_0$.

Ví dụ 27. Một người dự kiến dùng 130 đơn vị tiền để mua hai loại hàng hoá có giá lần lượt là $P_1 = 4$, $P_2 = 6$. Biết hàm hữu dụng của hai loại hàng này là $U(x_1, x_2) = (x_1 + 2)(x_2 + 1)$, trong đó x_1 , x_2 lần lượt là khối lượng hai loại hàng. Hãy xác định x_1 , x_2 để hàm hữu dụng đạt giá trị lớn nhất.

VI.6. HÀM THUẦN NHẤT VÀ ĐÁNH GIÁ HIỆU QUẢ QUY MÔ SẢN XUẤT

1. KHÁI NIỆM HÀM THUẦN NHẤT

a) **Định nghĩa**: Hàm z = f(x, y) xác định trên miền phẳng D gọi là hàm thuần nhất bậc s nếu

$$f(tx, ty) = t^s f(x, y);\ \forall (x, y)\in D \text{ mà } (tx, ty)\in D,\ \forall t > 0.$$

b) **Ví dụ 28**: $f(x, y) = x^3 + 2x^2y - 5xy^2 + y^3$ là hàm thuần nhất bậc 3.

c) **Ví dụ 29**: Hàm sản xuất Cobb – Douglas $Q = Q(K, L) = AK^\alpha L^\beta$ (A, α, β là các số dương); ở đây K là vốn (tư bản), L là lượng lao động.

2. CÔNG THỨC EULER

Cho hàm hai biến z = f(x, y) xác định và có các đạo hàm riêng liên tục trên miền phẳng chữ nhật

$$D = \{(x, y) / a < x < b;\ c < y < d\} \ (a < b,\ c < d \text{ là 4 số thực đã cho})$$

Để f là hàm thuần nhất bậc s > 0, cần và đủ là $\mathbf{xz'_x + yz'_y = s.z}$; ∀(x, y) ∈D.

3. ĐÁNH GIÁ HIỆU QUẢ CỦA QUY MÔ SẢN XUẤT

a) **Quy mô sản xuất tăng**: Ta nói quy mô sản xuất tăng lên t lần tức là tất cả các yếu tố dùng trong sản xuất đều tăng lên t lần (t > 1).

b) Giả sử hàm sản xuất là Q = Q(K, L). Ta nói

+ ***Hiệu quả sản xuất tăng theo quy mô*** nếu $Q(tK, tL) > tQ(K, L),\ \forall t > 1$.
+ ***Hiệu quả sản xuất giảm theo quy mô*** nếu $Q(tK, tL) < tQ(K, L),\ \forall t > 1$.
+ ***Hiệu quả sản xuất không đổi theo quy mô*** nếu $Q(tK, tL) = tQ(K, L),\ \forall t > 1$.

c) **Nhận xét**: Nếu Q = Q (K, L) là hàm thuần nhất bậc s > 0 thì

+ **Hiệu quả sản xuất tăng theo quy mô** khi và chỉ khi s > 1.
+ **Hiệu quả sản xuất giảm theo quy mô** khi và chỉ khi s < 1.
+ **Hiệu quả sản xuất không đổi theo quy mô** khi và chỉ khi s = 1.

d) **Ví dụ 30**: Hàm Cobb – Douglas $Q = Q(K, L) := AK^\alpha L^\beta$ (A, α, β là các số dương) rõ ràng là hàm thuần nhất bậc s = α + β. Do đó hiệu quả sản xuất tăng, giảm, không đổi theo quy mô tương ứng với α + β > 1, α + β < 1, α + β = 1.

BÀI TẬP CHƯƠNG VI

VI.1. Tính các đạo hàm riêng của các hàm số sau đây

a) $z = \dfrac{x+y}{x-y}$ b) $z = xe^{xy}$ c) $z = y^2 e^{2x-y}$

VI.2. Tính các đạo hàm riêng cấp hai của các hàm số sau đây

a) $z = \cos(x^2 + y^2)$ b) $z = xye^x$

c) $z = \dfrac{xy}{x-y}$ d) $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$

VI.3. Tính vi phân cấp một, cấp hai của các hàm số sau đây

a) $z = 3x^2 - 2xy + 3y^2$ b) $z = \dfrac{xy}{x-y}$ c) $z = \ln(3x - 2y)$

VI.4. Tìm cực trị của các hàm số sau đây

a) $z = 4 - x^2 - y^2$ b) $z = e^{-x^2 - y^2}$

c) $z = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ d) $z = 2x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y - 12x - 4$

VI.5. Tìm cực trị với điều kiện của các hàm số sau đây

a) $f(x,y) = xy$, $x + y = 100$ b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $x + y = 10$

c) $f(x,y) = x + 3y$, $xy = 64$ d) $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $x + y = 1$

VI.6. Giả sử một người tiêu dùng mua hai loại hàng hoá. Cho biết hàm hữu dụng của hai loại hàng này là $U(x,y) = (x+2)^2(y+3)^2$, trong đó x, y lần lượt là khối lượng hai loại hàng hoá đó.

a) Tìm hàm hữu dụng biên theo từng loại hàng hoá.

b) Tính giá trị hữu dụng biên theo loại hàng hoá thứ nhất khi người đó mua mỗi loại hàng 3 đơn vị khối lượng.

VI.7. Một công ty sản xuất hai loại hàng hoá có hàm cầu lần lượt là

$$Q_1 = 280 - \frac{2}{5}P_1 + \frac{1}{5}P_2 \,,\; Q_2 = 420 + \frac{1}{5}P_1 - \frac{2}{5}P_2 .$$

Giả sử tổng chi phí xác định bởi $C(Q) = 40Q_1 + 180Q_2 + Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$.

Tìm mức sản lượng để công ty thu được lợi nhuận tối đa.

VI.8. Một công ty sử dụng hai nguyên liệu đầu vào để sản xuất. Giả sử sản lượng Q tại các mức nguyên liệu đầu vào x_1 , x_2 xác định bởi công thức $Q(x_1,x_2) = 12x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{2}}$. Cho biết giá của hai loại nguyên liệu đầu vào lần lượt là p_1 , p_2, còn giá bán sản phẩm của công ty là q.

a) Hãy xác định hàm lợi nhuận.
b) Tìm mức nguyên liệu đầu vào x_1 , x_2 để lợi nhuận lớn nhất.

VI.9. Cho hàm lợi ích tiêu dùng U = U(Q_1, Q_2) = $Q_1Q_2 + Q_1 + 2Q_2$ của hai lượng cầu hai loại hàng hóa tiêu dùng Q_1, Q_2. Hãy xác định lượng cầu của hai loại hàng hóa đó để tối đa hóa lợi ích biết rằng giá bán hai loại hàng hóa đó lần lượt là 2USD, 5USD và thu nhập dành cho tiêu dùng là 51USD.

VI.10. Cho hàm lợi ích U = U(Q_1, Q_2) = $Q_1^{0,6}.Q_2^{0,25}$ hai lượng cầu hai loại hàng hóa tiêu dùng Q_1, Q_2. Hãy xác định lượng cầu của hai loại hàng hóa đó để tối đa hóa lợi ích biết rằng giá bán hai loại hàng hóa đó lần lượt là 8USD, 5USD và thu nhập dành cho tiêu dùng là 680USD.